两类非连通图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)$ 及 $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0) \cup G_r$ 的优美性*

吴跃生，徐保根
（华东交通大学基础科学学院，江西 南昌 330013）

摘　要：对自然数 n, m, $i \in N$, 设 K_i 表示 i 个顶点的完全图，$\overline{K_n}$ 表示 K_n 的补图，$St(m)$ 表示 $m+1$ 个顶点的星形树，G_r 为有 r 条边的优美图，P_n 为 n 个节点的路，$P_2 \vee \overline{K_n}$ 是 P_2 与 $\overline{K_n}$ 联图。给出了非连通图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1,r_2,0,\cdots,0) \cup St(m)$ 及 $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0) \cup G_r$ 的定义，并论证了当 $n \geqslant 2$ 时，这两类图都是优美图。

关键词：联图；非连通图；冠；星；优美图
中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2012）05－0063－04

The Gracefulness of Two Kinds of Unconnected Graphs $(P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)$ and $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0) \cup G_r$

WU Yuesheng, *XU Baogen*
(School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: For natural numbers n, m and $i \in \mathbf{N}$, let K_i be an i-vertex complete graph, let $\overline{K_n}$ be the complement graph of graph K_n. A $(m+1)$ -vertex star tree is represented by $St(m)$. Let G_r be a graceful graph with r-edges, let P_n be a n-vertex path and let $P_2 \vee \overline{K_n}$ be the join graph of P_2 and $\overline{K_n}$. Two kinds of unconnected graphs $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1,r_2,0,\cdots,0) \cup St(m)$ and $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0) \cup G_r$ are presented. It proves that the above two kinds of graphs are graceful graphs when $n \geqslant 2$.

Key words: join graph; disconnected graph; corona; star; graceful graph

图的标号问题是组合数学中一个热门课题。它不仅属于图论领域，也属于设计理论的范畴，主要应用于编码设计、变压器箱设计、雷达脉冲、射电天文学、通讯网络、晶体结构中原子位置的测定和导弹控制码等方面。

1　概念

本文所讨论的图均为无向简单图，$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集。

定义 1[1]　对于一个图 $G=(V,E)$，如果存在一个单射 $\theta: V(G) \to \{0,1,2,\cdots,|E(G)|\}$ 使得对所有边 $e=(u,v) \in E(G)$，由 $\theta'(e)=|\theta(u)-\theta(v)|$ 导出的 $E(G) \to \{1,2,\cdots,|E(G)|\}$ 是一个双射，则称 G 是优美图，θ 是 G 的一组优美标号，称 θ' 为 G 的边上的由 θ 导出的诱导值。

定义 2[2-12]　$V(G)=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 的每个顶点 v_i 都粘接了 r_i 条悬挂边（$r_i \geqslant 0$ 是整数，$i=1,2,\cdots,n$）所得到的图，称为图 G 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_n)$－冠，简记为 $G(r_1,r_2,\cdots,r_n)$。特别地，当 $r_1=r_2=\cdots=r_n=r$ 时，称为图 G 的 r－冠。图 G 的 0－冠就是图 G。

定义 3[13]　对于自然数 $m,n,i,j,k \in \mathbf{N}$，图 $(P_2 \vee \overline{K_n}) \cup St(m)$ 满足：

$$V(P_2 \vee \overline{K_n}) \cup St(m)) = \{y_1, y_2, x_i, z_j, 1 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant m\},$$

* **收稿日期**：2012－02－20
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11061014）；江西省自然科学基金资助项目（20114BAB201010）；华东交通大学校立科研基金资助项目（11JC05）
作者简介：吴跃生（1959 年生），男，副教授；E-mail：yuesenw@yahoo.com.cn

$$E(P_2 \vee \overline{K_n}) \cup St(m)) =$$
$$\{y_1y_2,\ y_1x_i,\ y_2x_i,\ z_0z_k,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant k \leqslant m\}$$

其中 $St(m)$ 表示 $m+1$ 个顶点的星形树，P_2 是2个节点的路，K_n 表示 n 个顶点的完全图，$\overline{K_n}$ 是 K_n 的补图，$P_2 \vee \overline{K_n}$ 是 P_2 与 $\overline{K_n}$ 联图，则图（$P_2 \vee \overline{K_n}$）$\cup$ $St(m)$ 的顶点数和边数分别是 $n+m+3$ 和 $2n+m+1$。

定义 4　对于自然数 $n \in \mathbf{N}$，图（$P_2 \vee \overline{K_n}$）$\cup$ G_{n-1} 满足：

$$V((P_2 \vee \overline{K_n}) \cup G_{n-1}) =$$
$$\{y_1,\ y_2,\ x_i, 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup V(G_{n-1}),$$
$$E((P_2 \vee \overline{K_n}) \cup G_{n-1}) =$$
$$\{y_1y_2,\ y_1x_i,\ y_2x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup E(G_{n-1})$$

其中 G_{n-1} 为有 $n-1$ 条边的优美图，P_2 是 2 个节点的路，K_n 表示 n 个顶点的完全图，$\overline{K_n}$ 是 K_n 的补图，$P_2 \vee \overline{K_n}$ 是 P_2 与 $\overline{K_n}$ 联图，则图（$P_2 \vee \overline{K_n}$）$\cup$ G_{n-1} 的边数是 $3n$。

定义 5　对于自然数 m，n，i，j，k，s，t，$r_1, r_2 \in \mathbf{N}$，图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)$ 满足：

$V((P_2 \vee \overline{K_n})) = \{y_1,\ y_2,\ x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$，顶点 x_i 粘接了 r_i 条悬挂边 $(i = 1,\ n)$；

$$V((P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)) =$$
$$\{y_1,\ y_2,\ x_i,\ x_{1,s},\ x_{n,t},\ z_j,$$
$$1 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant s \leqslant r_1,\ 0 \leqslant t \leqslant r_2, 0 \leqslant j \leqslant m\};$$
$$E((P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)) =$$
$$\{y_1y_2,\ y_1x_i,\ y_2x_i,\ x_1x_{1,s},\ x_nx_{n,t},\ z_0z_k,$$
$$1 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant s \leqslant r_1,\ 0 \leqslant t \leqslant r_2, 1 \leqslant k \leqslant m\}$$

其中 $St(m)$ 表示 $m+1$ 个顶点的星形树，P_2 是2个节点的路，K_n 表示 n 个顶点的完全图，$\overline{K_n}$ 是 K_n 的补图，$P_2 \vee \overline{K_n}$ 是 P_2 与 $\overline{K_n}$ 联图，则图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)$ 的顶点数和边数分别是 $n+m+r_1+r_n+3$ 和 $2n+m+r_1+r_n+1$。

定义 6　对于自然数 m，n，i，j，k，s，t，$r_1, r_2 \in \mathbf{N}$，图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0) \cup G_r$ 满足：

$V((P_2 \vee \overline{K_n}) \cup G_r) = \{y_1,\ y_2,\ x_i, 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup V(G_r)$，顶点 y_1 粘接了 r_1+a 条悬挂边，顶点 y_2 粘接了 r_2 条悬挂边；

$$V((P_2 \vee \overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0) \cup G_r) =$$
$$\{y_1, y_2,\ x_i,\ y_{1,s},\ y_{1,t},$$
$$1 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant s \leqslant r_1+a,\ 0 \leqslant t \leqslant r_2\} \cup V(G_r);$$
$$E((P_2 \vee \overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0) \cup G_r) =$$
$$\{y_1y_2,\ y_1x_i,\ y_2x_i,\ y_1y_{1,s},\ y_2y_{2,t},$$
$$1 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant s \leqslant r_1+a,\ 0 \leqslant t \leqslant r_2\} \cup E(G_r),$$

其中 G_r 为有 r 条边的优美图，P_2 是 2 个节点的路，K_n 表示 n 个顶点的完全图，$\overline{K_n}$ 是 K_n 的补图，$P_2 \vee \overline{K_n}$ 是 P_2 与 $\overline{K_n}$ 联图。

文［13］-［19］讨论了星形树与其他图的非连通并集的优美性。本文讨论 $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1,r_2,0,\cdots,0) \cup St(m)$ 及 $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0) \cup G_r$ 的优美性。推广了文［13］和文［14］的结论。

2　主要结果及其证明

定理 1　对于自然数 m，n，$r_1, r_2 \in \mathbf{N}$，当 $n \geqslant 2$ 时，图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)$ 是优美图。

证明　定义 $(P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)$ 的顶点标号 θ 为：

当 $r_j = 0$ 时，$x_{j,i} = x_j, j = 1,n; i = 1,2,\cdots,r_j$；

当 $r_j \neq 0$ $(j = 1,n)$ 时，

$$\theta(x_{1,i}) = 2n+m+r_1+r_n+2-i, i = 1,2,\cdots,r_1,$$
$$\theta(y_1) = 2n+m+r_n+1, \theta(y_2) = 2n+m+r_n,$$
$$\theta(x_{n,i}) = 2n+m+r_n-i, i = 1,2,\cdots,r_n,$$
$$\theta(x_i) = 2(i-1),\ i = 1,2,\cdots,n,$$
$$\theta(z_0) = 2n-3; \theta(z_j) = 2n+j-2, j = 1,2,\cdots,m$$

下面证明标号 θ 是图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)$ 的优美标号。

（i）由于

$$0 = \theta(x_1) < \theta(x_2) < \cdots < \theta(x_{n-1}) < \theta(z_0) < \theta(x_n) < \theta(z_1) < \theta(z_2) < \cdots < \theta(z_m) < \theta(x_{n,r_n}) < \theta(x_{n,r_n-1}) < \cdots < \theta(x_{n,1}) < \theta(y_2) < \theta(y_1) < \theta(x_{1,r_1}) < \theta(x_{1,r_1-1}) < \cdots < \theta(x_{1,1}) = 2n+m+r_1+r_n+1$$

容易验证：对于自然数 m，n，$r_1, r_2 \in \mathbf{N}$，$n \geqslant 2$，θ：$V((P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)) \to \{0,1,2,\cdots,2n+m+r_1+r_n+1\}$ 是一个单射。

（ii）由点标号 θ 导出的边标号 θ' 为：

$$\theta'(y_1y_2) = 1, \theta'(x_1x_{1,i}) = 2n+m+r_1+r_n+2-i,$$
$$i = 1,2,\cdots,r_1,$$
$$\theta'(y_1x_i) = 2n+m+r_n-1-2i, i = 1,2,\cdots,n,$$
$$\theta'(y_2x_i) = 2n+m+r_n-2-2i, i = 1,2,\cdots,n,$$
$$\theta'(x_nx_{n,i}) = m+r_n+2-i, i = 1,2,\cdots,r_n,$$
$$\theta'(z_0z_i) = i+1, i = 1,2,\cdots,m$$

易见，对于自然数 m，n，$r_1, r_2 \in N$，$n \geqslant 2$，θ'：$E((P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)) \to \{1,2,\cdots,2n+m+r_1+r_n+1\}$ 是一个双射。

因此 θ 是图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)$ 的优美标号。即图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)$ 是优美图。

在定理 1 中，令 $r_1 = r_n = 0$，有以下推论。

推论 1　对于自然数 m，$n\in\mathbf{N}$，当 $n\geqslant 2$ 时，图 $(P_2\vee\overline{K_n})\cup St(m)$ 是优美图。（这正是文［13］中的定理 1）

图 $(P_2\vee\overline{K_3})(0,0,2,0,3)\cup St(4)$ 的优美标号，如图 1 所示。

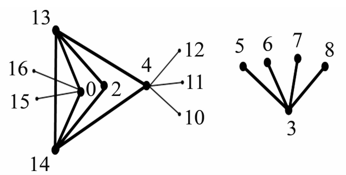

图 1　图 $(P_2\vee\overline{K_3})(0,0,2,0,3)\cup St(4)$ 的优美标号

Fig. 1　Graceful labeling of graph $(P_2\vee\overline{K_3})(0,0,2,0,3)\cup St(4)$

定理 2　对于自然数 n,r_1,r_2,a,r，G_r 表示有 r 条边的优美图，则当 $n\geqslant 2$，且 $a+r=n-1$ 时，图 $(P_2\vee\overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0)\cup G_r$ 是优美图。

证明　不妨设有 r 条边的优美图 G_r 的优美标号为 h，则 $h:V(G_r)\to\{0,1,2,\cdots,r\}$ 是一个单射，定义 $(P_2\vee\overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0)\cup G_r$ 的顶点标号 g 为：

当 $r_1+a=0$ 时，$x_{1,i}=x_1, i=1,2,\cdots,r_1+a$；

当 $r_2=0$ 时，$x_{2,i}=x_2, i=1,2,\cdots,r_2$；

当 $r_1+a\neq 0, r_2\neq 0$ 时，

$$g(y_1)=0, g(y_2)=n,$$

$$g(y_{1,i})=\begin{cases}3n+r_1+r_2+1-i, i=1,2,\cdots,r_1,\\ r+i-r_1, i=r_1+1,r_1+2,\cdots,r_1+a\end{cases}$$

$$g(x_i)=3n+r_2+1-i, i=1,2,\cdots,n,$$

$$g(y_{2,i})=2n+r_2+1-i, i=1,2,\cdots,r_2,$$

$$g(v)=h(v)+n+1, v\in V(G_r)$$

下面证明标号 g 是图 $(P_2\vee\overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0)\cup G_r$ 的优美标号。

（i）由于

$$0=g(y_1)<g(y_{1,r_1+1})<g(y_{1,r_1+2})<\cdots<g(y_{1,r_1+a})<g(y_2)<\underset{v\in V(G_r)}{g(v)}<g(y_{2,r_2})<g(y_{2,r_2-1})<\cdots<g(y_{2,1})<g(x_n)<g(x_{n-1})<\cdots<g(x_1)<g(y_{1,r_1})<g(y_{1,r_1-1})<\cdots<g(y_{1,1})=3n+r_1+r_2$$

容易验证：对于自然数 n,r_1,r_2,a,r，当 $n\geqslant 2$ 时，$g:(P_2\vee\overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0)\cup G_r\to\{0,1,2,\cdots,3n+r_1+r_2\}$ 是一个单射。

（ii）由点标号 g 导出的边标号 g' 为：

$$g'(y_1y_{1,i})=\begin{cases}3n+r_1+r_2+1-i, i=1,2,\cdots,r_1,\\ r+i-r_1, i=r_1+1,r_1+2,\cdots,r_1+a\end{cases}$$

$$g'(y_1y_2)=n, g'(x_i)=3n+r_2+1-i, i=1,2,\cdots,n,$$

$$g'(y_2y_{2,i})=2n+r_2+1-i, i=1,2,\cdots,r_2,$$

$$g'(y_1x_i)=3n+r_2+1-i, i=1,2,\cdots,n,$$

$$g'(y_2x_i)=2n+r_2+1-i, i=1,2,\cdots,n,$$

$$g'(e)=h'(e), e\in E(G_r)$$

易见，对于自然数 n,r_1,r_2,a,r，则当 $n\geqslant 2$ 时，

$g':E((P_2\vee\overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0)\cup G_r)\to\{1,2,\cdots,3n+r_1+r_2\}$ 是一个双射。

因此 g 是图 $(P_2\vee\overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0)\cup G_r$ 的优美标号。即图 $(P_2\vee\overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0)\cup G_r$ 是优美图。

在定理 2 中，令 $r_1+a=r_2=0$，有以下推论。

推论 2　$(P_2\vee\overline{K_n})\cup G_{n-1}$ 是优美图（这正是文［14］中的定理 3）

推论 3　对于自然数 n,r_1,r_2,a,r，T_r 表示 r 个顶点的优美树，则当 $n\geqslant 2$，且 $a+r=n-1$ 时，图 $(P_2\vee\overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0)\cup T_r$ 是优美图。（令 $r_1+a=r_2=0$，正是文［13］中的定理 2）

图 $(P_2\vee\overline{K_6})(2,3,0,0,0,0,0,0)\cup T_6$ 和 $(P_2\vee\overline{K_6})(2,3,0,0,0,0,0,0)\cup G_5$ 的优美标号，如图 2 和图 3 所示。

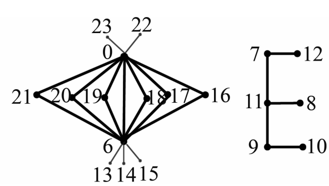

图 2　图 $(P_2\vee\overline{K_6})(2,3,0,0,0,0,0,0)\cup T_6$ 的优美标号

Fig. 2　Graceful labeling of graph $(P_2\vee\overline{K_6})(2,3,0,0,0,0,0,0)\cup T_6$

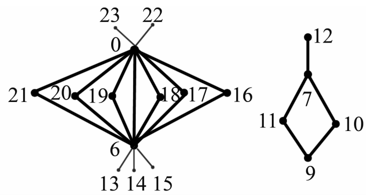

图 3　图 $(P_2\vee\overline{K_6})(2,3,0,0,0,0,0,0)\cup G_5$ 的优美标号

Fig. 3　Graceful labeling of graph $(P_2\vee\overline{K_6})(2,3,0,0,0,0,0,0)\cup G_5$

推论 4　对于自然数 n,r_1,r_2,a,r，则当 $n\geqslant$

2，且 $a+r=n-1$ 时，图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0) \cup St(r)$ 是优美图。

推论 5 对于自然数 n,r_1,r_2,a,r，则当 $n \geqslant 2$，且 $a+r=n-1$ 时，图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0) \cup P_{r+1}$ 是优美图。

定义 7[1] 设 C_n 是长为 n 的圈，当 $n>3$ 时，联图 $(P_1 \vee C_n)$ 称为轮，记 W_n。

引理 1 所有的轮 W_n 都是优美图。

推论 6 对于自然数 n，r_1,r_2,a,r，则当 $n \geqslant 2$，且 $a+2r=2n$ 时，$(P_2 \vee \overline{K_{2n+1}})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0) \cup W_r$ 是优美图。（令 $r_1+a=r_2=0$，正是文［14］中的推论 2）

图 $(P_2 \vee \overline{K_{13}})(3+4,2,0,\cdots,0) \cup W_4$ 的优美标号，如图 4 所示。

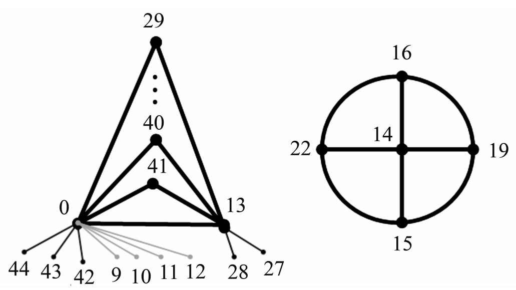

图 4 图 $(P_2 \vee \overline{K_{13}})(3+4,2,0,\cdots,0) \cup W_4$ 的优美标号

Fig. 4 Graceful labeling of graph $(P_2 \vee \overline{K_{13}})(3+4,2,0,\cdots,0) \cup W_4$

参考文献：

［1］ 马杰克. 优美图[M]. 北京:北京大学出版社,1991.

［2］ 吴跃生,李咏秋. 关于圈 C_n 的 $(r_1, r_2,\cdots,r_n)$ – 冠 $(n=7,8)$ 的优美性[J]. 阜阳师范学院学报:自然科学版, 2010, 27(3):20 –23.

［3］ 吴跃生,李咏秋. 关于圈 C_{11} 的 $(r_1, r_2,\cdots,r_{11})$ 冠的优美性[J]. 长春师范学院学报,2010, 29(6):4 –8.

［4］ 吴跃生,李咏秋. 再探圈 C_n 的 $(r_1, r_2,\cdots,r_n)$ – 冠 $(n=7,8)$ 的优美性[J]. 阜阳师范学院学报:自然科学版,2010, 27(4):1 –4.

［5］ 吴跃生,李咏秋. 关于圈 C_3 的 $(1, 2a, 2a+1)$ – 冠的优美性[J]. 河南教育学院学报,2010, 4: 1 –2.

［6］ 吴跃生. 关于圈 C_{4h} 的 $(r_1, r_2,\cdots,r_{4h})$ – 冠 的优美性[J]. 华东交通大学学报, 2011, 28(1): 77 –80.

［7］ 吴跃生, 李咏秋. 关于圈 C_{4h+3} 的 $(r_1, r_2,\cdots,r_{4h})$ – 冠的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2011, 32(6): 1 –4.

［8］ 吴跃生,李咏秋. 关于图 $\omega_{4,4}$ 的 $(r_1, r_2,\cdots,r_7)$ – 冠 的优美性[J]. 宜春学院学报,2010, 32(12):1 –3.

［9］ 吴跃生,李咏秋. 关于图 $\omega_{5,7}$ 的 $(r_1, r_2,\cdots, r_{11})$ – 冠 的优美性[J]. 嘉应学院学报,2011, 29(5): 5 –8.

［10］ 吴跃生,李咏秋. 关于图 $\omega_{5,6}$ 的 $(r_1, r_2,\cdots, r_{10})$ – 冠的优美性[J]. 北京联合大学学报,2011, 25(2): 60 –61.

［11］ 吴跃生. 关于图 $\omega_{4,6}$ 的 $(r_1, r_2,\cdots, r_9)$ – 冠 的优美性[J]. 宜春学院学报,2011, 33(8):1 –3.

［12］ 康芳茂,吴跃生. 关于 $C_n \odot k_1$ 的 $(r_0,r_1, r_2,\cdots,r_n)$ – 冠 $(n=6)$ 的 优美性[J]. 怀化学院学报, 2011, 30(5): 8 –10.

［13］ 潘伟,路线. 两类非连通图 $(P_2 \vee \overline{K_n}) \cup St(m)$ 及 $(P_2 \vee \overline{K_n}) \cup T_n$ 的优美性[J]. 吉林大学学报:理学版,2003, 41(4): 153 –155.

［14］ 魏丽侠,张昆龙. 关于 $(P_1^{(1)} \vee P_n) \cup (P_1^{(2)} \vee P_{2n})$ 和 $(P_2 \vee \overline{k_n}) \cup G_{n-1}$ 的优美性研究[J]. 合肥工业大学学报:自然科学版,2008 ,31(2): 276 –279.

［15］ 魏丽侠,张昆龙. 几类并图的优美标号[J]. 中山大学学报:自然科学版,2008, 47(3): 10 –13.

［16］ 蔡华,魏丽侠,吕显瑞. 非连通图 $(P_1 \vee P_n) \cup G_r$ 和 $(P_1 \vee P_n) \cup (P_3 \vee K_r)$ 及 $W_n \cup St(m)$ 的优美性[J]. 吉林大学学报:理学版,2007, 45(4): 539 –543.

［17］ 蔡华. 几类非连通图的优美性[D]. 吉林大学硕士学位论文, 2007.

［18］ 李长春,韩兆红,张国阳. 关于 $st \bigcup_{i=1}^{n} m_i - C_4$ 的优美性[J]. 吉林师范大学学报:自然科学版,2007, 4:55 –56.

［19］ 高娜. 关于 $(\overline{k_n} \vee p_m) \cup st(p)$ 和 $(\overline{k_n} \vee p_m) \cup k_{2,s}$ 的优美性[J]. 吉林工程技术师范学院学报, 2010, 26(4): 72 –73.